

# CALCOLO DELL'ELICA DI UN AEROMODELLO AD ELASTICO

Filippo Surace NIKE Milano

Il calcolo aerodinamico dell'elica di un aeromodello ad elastico deve essere in grado di fornire precise indicazioni sul dimensionamento dell'elica e sul suo comportamento durante la salita, caratterizzata da velocità di volo e momento motore continuamente variabili. Queste indicazioni possono essere fornite solo da teorie relativamente complesse che tengono conto del reale comportamento aerodinamico delle pale nelle diverse condizioni di incidenza reale, ottenibili solo attraverso l'integrazione del campo aerodinamico indotto dalla scia vorticosa di valle.

D'altra parte la particolare applicazione consente alcune semplificazioni dovute al carico aerodinamico modesto sul disco dell'elica (si ricercano alti rendimenti), al numero di Mach trascurabile alle estremità delle pale, ed all'assenza di ostacoli apprezzabili a valle dell'elica.

Notiamo per inciso che queste condizioni favorevoli non sono quasi mai soddisfatte nel caso dei motomodelli.

La teoria di Betz-Prandtl opportunamente adattata, rappresenta un buon compromesso fra complessità e necessità di fornire le informazioni di progetto richieste.

Nel punto -1- viene illustrata la teoria e la sua applicazione al progetto aerodinamico dell'elica, definito in funzione di assegnati valori medi di velocità di volo e di momento motore.

Nel punto -2- viene proposto un metodo di calcolo delle prestazioni di un'elica di forma assegnata, in condizioni di funzionamento diverse da quelle di progetto. Questo metodo è stato utilizzato come sottoprogramma del programma di "Analisi delle Prestazioni di un Aeromodello ad Elastico" che è stato oggetto di una memoria nel "Convegno sul Volo Libero" del 1992.

## -1-DIMENSIONAMENTO AERODINAMICO DELL'ELICA SECONDO LA TEORIA DI BETZ-PRANDTL.

Questa teoria, illustrata per la prima volta dagli autori nel 1919, è stata successivamente rielaborata e ampliata principalmente ad opera di Glauert e Goldstein. Data la relativa complessità, è opportuno introdurre il problema per gradi successivi di difficoltà, ricordando in sintesi i principali risultati raggiunti dalle teorie aerodinamiche elementari.

### -1.1-Teoria impulsiva.

Riferiamo il moto all'elica, e consideriamola costituita da un disco attraverso il quale l'aria viene accelerata sul piano del disegno della Fig.1, formando un tubo di flusso come indicato in figura. All'infinito a monte la velocità nel tubo di flusso coincide con la velocità di volo, e la pressione è quella ambiente. Avvicinandosi al disco dell'elica, la velocità aumenta e il tubo di flusso si restringe fino a raggiungere il diametro dell'elica. Per il teorema di Bernoulli la faccia anteriore del disco dell'elica è in depressione.

All'attraversamento del disco, considerato di spessore nullo, la velocità rimane costante per continuità, mentre la pressione sale ad un valore superiore rispetto all'ambiente, come conseguenza dell'energia trasmessa dal disco all'aria.

All'infinito a valle la sezione del tubo di flusso si stabilizza, la pressione ritorna al valore ambiente, e per il teorema di Bernoulli la velocità subisce un ulteriore aumento rispetto alla velocità di attraversamento del disco. Si forma così la scia dell'elica.

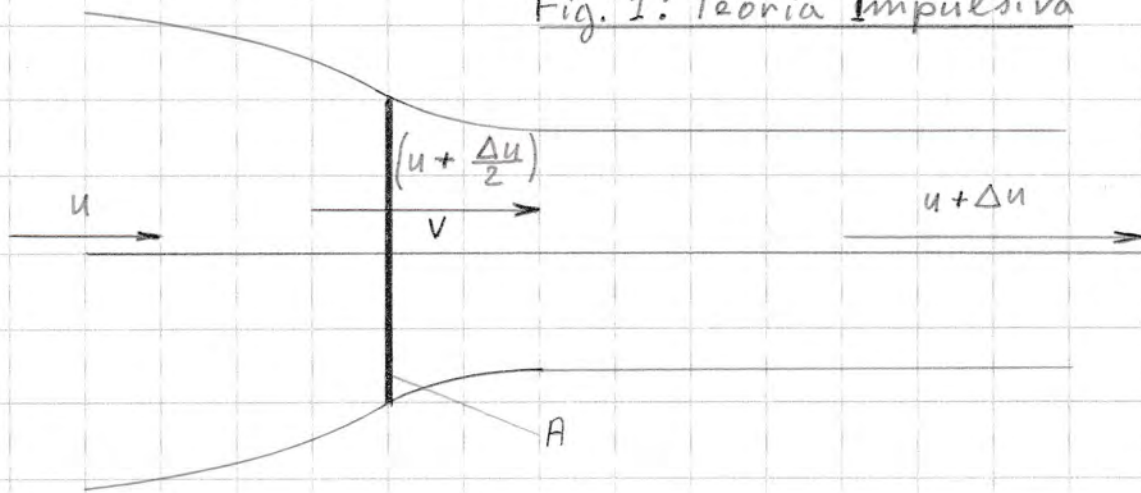
Applicando insieme al teorema di Bernoulli il teorema della quantità di moto, si arriva con semplici passaggi alle seguenti importanti conclusioni (Fig.1):

- Velocità e salto di pressione sono uniformi su tutto il disco dell'elica.
- Con riferimento alla velocità di volo, l'incremento di velocità al disco dell'elica è  $1/2$  dell'incremento di velocità alla scia (Teorema di Froude).
- Spinta e potenza sono funzioni crescenti dell'incremento di velocità alla scia, e si annullano per incremento nullo.
- Il rendimento dell'elica (rapporto fra potenza utile e potenza motrice) è funzione decrescente dello incremento di velocità alla scia, e raggiunge il valore massimo = 1 per incremento nullo e quindi per spinta nulla. In particolare, considerando la espressione del rendimento in funzione della spinta, si deduce che si raggiungono rendimenti tanto maggiori quanto maggiore è il diametro dell'elica.

### -1.2-Teoria Vorticoso Semplice.

La teoria impulsiva rappresenta un approccio troppo elementare al problema, che dà luogo ad una valutazione ottimistica del funzionamento dell'elica, per almeno due ragioni:

Fig. 1: Teoria Impulsiva



$u$  = velocità asintotica a monte (velocità di volo)

$v$  = velocità al disco dell'elica

$u + \Delta u$  = velocità asintotica a valle (velocità della scia)

$A$  = area del disco dell'elica

$\rho$  = densità dell'aria

$S$  = spinta dell'elica

$W_u$  = potenza utile

$W$  = potenza motrice

$\eta$  = rendimento

Teorema di Froude:  $v = u + \frac{\Delta u}{2}$

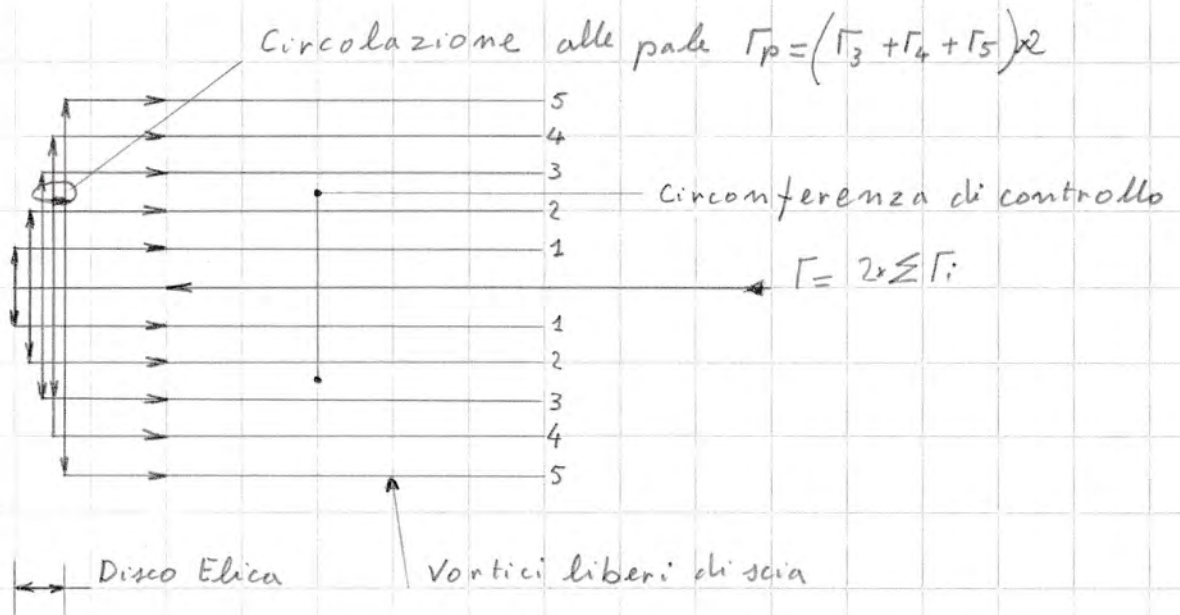
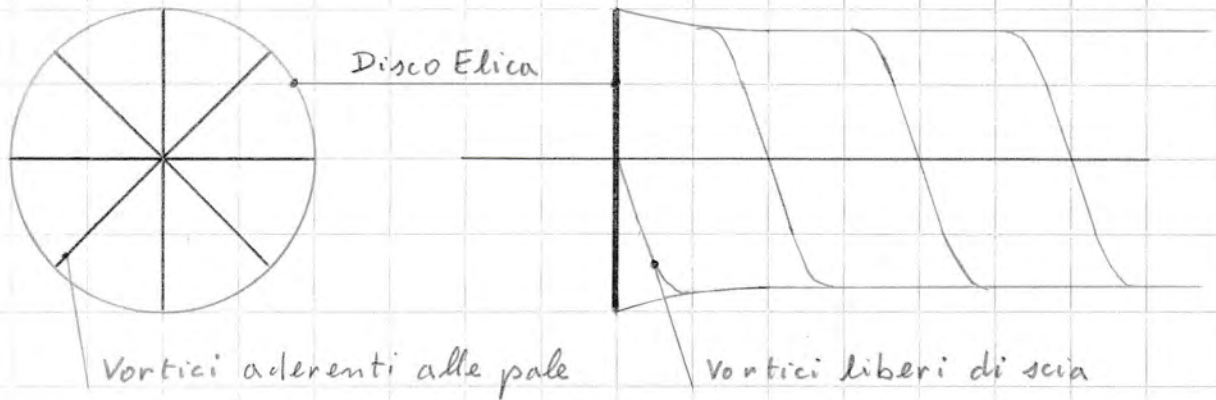
$$S = \frac{A\rho}{2} (2u + \Delta u) \Delta u$$

$$W_u = uS$$

$$W = \frac{A\rho}{2} (2u + \Delta u)^2 \frac{\Delta u}{2}$$

$$\eta = \frac{W_u}{W} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta u}{2u}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{2S}{A\rho u^2}}}$$

Fig. 2: Teoria Vorticoso Semplice



Circolazione alla circonferenza di controllo:

$$\Gamma_c = (\Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5) \times 2 = \Gamma_p$$

In generale per distribuzione continua di vorticità alle pale, posto:

$x =$  distanza radiale ;  $\Gamma(x) =$  vorticità complessiva alle pale, si genera nell'intervallo  $dx$  il vortice di scia:

$$\frac{d\Gamma(x)}{dx} dx$$



## Fig. 4: Teoria Vorticoso Semplice

Relazione fra  $\Delta u$  ed  $u_t$

$$\rho \Gamma V dx = L dx \quad (\text{Teorema di Kutta-Joukowski})$$

$$\frac{u_t}{\Delta u} = \frac{u}{\Delta u} \operatorname{tg} \alpha$$

$$V = \sqrt{u^2 + (u \operatorname{tg} \alpha)^2}$$

$C_l$  = corda

$\alpha$  = coefficiente di portanza

$$C_l \alpha = \frac{2 \Gamma}{V}$$

-Non vengono prese in considerazione le perdite che si hanno nel trasferimento di energia dalle pale alla corrente, dovute alla presenza di un coefficiente di resistenza non nullo del profilo delle pale.

-L'unica perdita presa in considerazione, quella per energia cinetica conferita alla scia, viene sottovalutata. Difatti non si tiene conto della presenza delle componenti trasversali di velocità indotte dal momento motore applicato all'elica.

La Teoria Vorticosa Semplice è in grado di colmare in buona parte le lacune della Teoria Impulsiva. Per la sua semplicità concettuale è ancora abbastanza usata, e permette di eseguire il calcolo aerodinamico dell'elica con discreta approssimazione. Inoltre le sue basi teoriche rappresentano la premessa indispensabile per la comprensione di teorie più avanzate.

Riferendo il moto al disco dell'elica, si considera ogni pala come sede di un vortice radiale di intensità variabile in funzione della portanza sviluppata nelle diverse sezioni della pala (Fig.2).

A monte dell'elica il moto è irrotazionale, mentre a valle si forma una scia vorticosa elicoidale costituita dai vortici liberi che si staccano dalle pale, in accordo con il teorema di continuità di Helmholtz.

Vale il seguente teorema fondamentale:

La circolazione misurata al raggio  $x$  nella scia asintotica è uguale all'intensità complessiva dei vortici delle pale misurata allo stesso raggio.

Una dimostrazione intuitiva di questo teorema è data nella Fig.2, dove per semplicità di rappresentazione, i vortici di un'elica bipala sono rappresentati come sovrapposizione di tanti vortici a staffa. Per maggior chiarezza i vortici aderenti alle pale sono stati leggermente traslati secondo l'asse.

Naturalmente nel caso reale di vorticità alla pala variabile con continuità, per un intervallo  $dx$  si staccherà dalla pala un vortice elementare dato dal prodotto della derivata del vortice rispetto ad  $x$  per l'intervallo  $dx$ .

Grazie a questo teorema è possibile, come si vedrà meglio in seguito, trattare ogni sezione di pala in maniera virtualmente indipendente dalle altre, con una notevole semplificazione di calcolo. Per inciso questa possibilità non sussiste nella trattazione delle ali di allungamento finito.

Per il calcolo aerodinamico dell'elica occorre valutare

le velocità indotte dai vortici di scia sulle diverse sezioni delle pale. L'integrazione diretta degli effetti dei vortici elementari è estremamente ardua. A questa si sostituiscono criteri di valutazione più o meno complessi, con diversi livelli di approssimazione.

Il criterio più elementare, adottato dalla Teoria Vorticosa Semplice, consiste nel ritenere che in ogni punto della scia asintotica la velocità sia solo funzione della distanza dall'asse. Questo corrisponde ad ammettere che i vortici di scia non sono discreti, che il numero di principi dell'elica di scia è infinito, e che quindi il numero di pale è infinito.

L'approssimazione di sostituire alla scia reale quella relativa ad un numero infinito di pale, costituisce il limite di questa teoria.

Con la suddetta ipotesi e in base al teorema enunciato, è immediato il calcolo della componente tangenziale della velocità asintotica di scia come funzione della vorticità complessiva alle pale (Fig.3). La componente assiale, nell'ipotesi di coefficiente di resistenza nullo delle pale, è legata alla componente tangenziale dalla relazione approssimata di Fig.4.

Le velocità asintotiche calcolate sono relative ad una schiera vorticosa che si estende dall'infinito a monte all'infinito a valle. Le velocità indotte dal vortice sul disco dell'elica sono invece generate da una schiera seminfinita, e valgono quindi 1/2 delle asintotiche (Fig.3).

Viene quindi confermato il teorema di Froude relativo alla componente assiale della velocità indotta.

Nella Fig.3 è riportato il triangolo delle velocità per la distanza  $x$  dall'asse. L'angolo di inclinazione della pala è la somma dell'angolo dovuto al triangolo base di velocità (velocità di volo e velocità tangenziale), dell'incidenza indotta e dell'incidenza di profilo.

L'incidenza indotta è legata alle due componenti della velocità indotta, mentre l'incidenza di profilo è legata alle condizioni di lavoro scelte per il profilo stesso. Il teorema di Kutta-Joukowski stabilisce la relazione fra vorticità e portanza, e quindi fra vorticità e prodotto del coefficiente di portanza per la corda (Fig.4).

Osserviamo che analogamente a quanto avviene per le ali di allungamento finito, l'incidenza indotta dà luogo ad una rotazione della retta di portanza che si traduce in una perdita energetica, con riduzione della spinta assiale ed aumento del momento motore.

Osserviamo infine che assumendo l'incidenza indotta



valori variabili in funzione della distanza dall'asse, ed essendo generalmente costante l'angolo di incidenza aerodinamica del profilo, il valore convenzionale del rapporto fra passo e diametro varia di sezione in sezione.

In genere questo valore raggiunge un minimo nella zona centrale della pala.

La teoria esposta viene sempre completata introducendo l'effetto della resistenza di profilo. In questo caso il calcolo delle componenti assiali e tangenziali delle velocità asintotiche di scia, e quindi delle velocità indotte, si complica alquanto, e viene eseguito applicando il teorema della quantità di moto secondo le due direzioni.

Sintetizziamo per chiarezza la procedura di calcolo:

#### INPUT:

Velocità di volo  
Velocità angolare dell'elica  
Raggio dell'elica  
Numero di pale  
Dati del profilo della pala, eventualmente variabili nelle diverse sezioni:  
Coefficiente di portanza  
Coefficiente di resistenza  
Angolo di incidenza  
Momento motore

#### ELABORAZIONE:

Si fissa la legge di variazione della vorticità alla pala o quella di incremento della velocità asintotica, definite a meno di un coefficiente di proporzionalità'. Si calcolano le velocità indotte, portanza e resistenza, e le loro componenti assiali e tangenziali. Per integrazione lungo il raggio si calcola il momento motore e lo si confronta con il dato in Input, correggendo il coefficiente di proporzionalità' in modo da far coincidere i due valori. A seconda del grado di approssimazione scelto nello sviluppo delle formule, questa correzione può essere immediata o iterativa. Ottenuto il coefficiente di proporzionalità', si calcola il valore effettivo della portanza in ogni sezione e quindi la corda nel caso di una sola pala. Dividendo per il numero di pale si ha la corda effettiva in ogni sezione. Dal triangolo di velocità si ricava l'inclinazione della pala in ogni sezione. Con questo il disegno dell'elica è definito.

Si calcola la spinta assiale per integrazione lungo il raggio.

Si calcola la potenza erogata dall'elica come prodotto della spinta per la velocita' di volo.

Si calcola la potenza assorbita dall'elica come prodotto del momento motore per la velocita' angolare.

Si calcola il rendimento dell'elica come rapporto fra potenza erogata e potenza assorbita.

Per qualunque livello di complessita' adottato nello sviluppo delle formule, il calcolo puo' essere eseguito in tempi molto brevi utilizzando un P.C. anche di modesta potenza.

#### -1.3-Teoria vorticosa di Betz-Prandtl.

La Teoria Vorticosa Semplice considera il disco dell'elica completamente riempito da un numero infinito di vortici radiali di intensita' infinitesima (numero di pale infinito). Da questa ipotesi si scostano molto le eliche degli aeromodelli ad elastico, che hanno in generale una o due pale. La presenza nel disco dell'elica di pochi vortici di intensita' finita rende disuniforme la distribuzione di velocita' al disco stesso, per cui dobbiamo attenderci rendimenti crescenti all'aumentare del numero delle pale. I risultati della Teoria Vorticosa Semplice sono quindi da considerarsi ottimistici.

La Teoria di Betz-Prandtl supera quest'ultima difficolta', consentendo di tener conto dell'effetto del numero finito di pale.

La difficolta' del problema consiste nel calcolare le velocita' indotte da una scia nella quale la distribuzione asintotica delle velocita' non e' piu' uniforme per un'assegnata distanza dall'asse.

E' abbastanza intuitivo, ed e' dimostrato, che la condizione di ottimo rendimento di un'elica si ottiene, a pari condizioni, con una distribuzione di portanza lungo le pale che da' luogo ad una componente assiale di velocita' indotta costante. Difatti si minimizza in tal modo a pari spinta l'energia cinetica conferita alla scia.

Partendo dall'ipotesi di componente assiale della velocita' indotta costante, si comprende facilmente che ogni pala genera un nastro vorticoso di scia che rimane tale anche asintoticamente. La scia asintotica e' quindi costituita da una serie di nastri vorticosi pari al numero delle pale.

Studiando l'interazione fra i nastri vorticosi ed il

campo irrotazionale esterno alla scia, Prandtl pervenne attraverso un certo numero di ipotesi semplificative, alla formulazione di una relazione fra velocità assiale e circolazione nella scia asintotica, in funzione fra l'altro del numero delle pale. L'utilizzazione di questa relazione venne successivamente estesa con successo anche al caso di velocità assiale non uniforme, consentendo una soddisfacente soluzione generalizzata del problema.

Evitando per semplicità l'esposizione delle elaborazioni eseguite, riportiamo i risultati della teoria nella forma generalizzata, adattata al calcolo diretto dell'elica introducendo alcune semplificazioni ed una ipotesi di distribuzione della velocità assiale abbastanza flessibile per l'utilizzazione nel campo di nostro interesse.

Nelle Figg.5;6;7 è esposta la procedura di calcolo in una forma adatta all'elaborazione su P.C. Anche in questo caso la potenza di calcolo richiesta è molto modesta (qualche secondo su un 386).

Commento all'INPUT:

-Caratteristiche aerodinamiche del profilo della pala: le formule di calcolo sono state elaborate per un profilo di caratteristiche costanti lungo la pala. Sono quindi considerati costanti l'efficienza, il coefficiente di portanza e l'angolo di incidenza del profilo. Sebbene sia possibile a prezzo di una piccola complicazione delle formule, considerare queste grandezze variabili lungo la pala, osserviamo che il rendimento dell'elica è solo influenzato dall'efficienza, che conviene quindi mantenere costante ed al massimo valore possibile. Il miglior profilo sarà quindi quello di massima efficienza. Ricordiamo che mentre nel caso di eliche ad altissimo numero di Reynolds è possibile ottenere valori di efficienza massima  $>100$ , in un aeromodello ad elastico si hanno valori massimi dell'ordine di 25-30.

-Coefficienti  $b;n$ : il calcolo eseguito nel caso ideale di incremento di velocità assiale costante alla scia (e quindi alla pala), dà luogo spesso a corde eccessive in prossimità della radice, inaccettabili sia per la elevata resistenza in planata con pale ripiegate, sia per il rischio di danneggiamento in atterraggio. Il fenomeno è più marcato per le eliche di basso rapporto fra passo e diametro. Conviene quindi accettare in questi casi una lieve riduzione del rendimento e correggere la forma della pala introducendo un incremento di velocità assiale crescente dal centro verso l'estremità. La legge di incremento adottata

## Fig. 5: Teoria di Betz-Prandtl

### INPUT

$B$  = numero di pale

$u$  = velocità di volo

$\omega$  = velocità angolare dell'elica

$R$  = raggio dell'elica

$E$  = efficienza di profilo della pala

$b$  = coefficiente lineare di correzione della distribuzione di velocità assiale alla scia ( $> -1$ )

$n$  = coefficiente esponenziale di correzione della distribuzione di velocità assiale alla scia ( $\geq 0$ )

$M$  = momento motore applicato all'elica

$\rho$  = densità dell'aria

$Q$  = coefficiente di portanza del profilo della pala

$\alpha_p$  = angolo di incidenza di lavoro del profilo della pala

### ELABORAZIONE

$a = \frac{u}{\omega R}$  coefficiente di avanzamento

$\xi = \frac{r}{R}$  raggio adimensionale ( $0 \leq \xi \leq 1$ )

Alla radice della pala  $\xi = 0$

All'estremità della pala  $\xi = 1$

$M = \frac{M}{\rho \omega^2 R^5}$  momento adimensionale

## Fig 6; Teoria di Betz-Prandtl

Calcolo di  $a_0$

$$f = \frac{B\sqrt{1+a^2}}{2a} (1-\xi)$$

$$Q = \left(2\xi + \frac{\xi^2}{E}\right) \frac{\xi^2(1+b\xi^m)}{2^2 + \xi^2} \arccos(e^{-f})$$

$$I_1 = \int_0^1 Q d\xi$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\xi^2(1+b\xi^m)}{2^2 + \xi^2} Q d\xi$$

$$a_0 = \sqrt{\frac{M}{8a^2 I_2} + \left(\frac{I_1}{2I_2}\right)^2} - \frac{I_1}{2I_2}$$

Calcolo della spinta adimensionale  $\sigma$

$$\sigma = 8a^2 a_0 \int_0^1 \left[1 - \frac{2^2 a_0 (1+b\xi^m)}{2^2 + \xi^2}\right] \left(\xi - \frac{2}{E}\right) \frac{\xi^2(1+b\xi^m)}{2^2 + \xi^2} \arccos(e^{-f}) d\xi$$

Calcolo della spinta  $S'$

$$S' = \rho \omega^2 R^4 \sigma$$

Calcolo del rendimento  $\eta$

$$\eta = \frac{2\sigma}{M}$$

## Fig. 7: Teoria di Betz-Prandtl

### Calcolo della corda C

$$C = \frac{16 R^2 a_0}{B l} \frac{\xi^2 (1 + b \xi^n)}{(a^2 + \xi^2)^{3/2}} \arccos(e^{-f})$$

### Calcolo dell'incidenza indotta $\mathcal{D}_i$

$$\mathcal{D}_i = \frac{2 a_0 (1 + b \xi^n) \xi}{a^2 + \xi^2}$$

### Calcolo dell'angolo di inclinazione della pala $\mathcal{D}_t$

$$\mathcal{D}_t = \operatorname{artg} \frac{a}{\xi} + \mathcal{D}_i + \mathcal{D}_p$$

### Numero di Reynolds $Re$ medio della pala

Posto  $\nu$  = viscosità cinematica dell'aria:

$$Re = \frac{16 a_0 \omega R^2}{B l \nu} \frac{\int_0^1 \left[ \frac{1 + b \xi^n}{a^2 + \xi^2} \arccos(e^{-f}) \right]^2 \xi^5 d\xi}{\int_0^1 \left[ \frac{1 + b \xi^n}{a^2 + \xi^2} \arccos(e^{-f}) \right] \xi^3 d\xi}$$

## Fig. 8: Teoria di Betz-Prandtl

Coefficiente di carico del disco dell'elica  $\chi$

$W$  = potenza applicata al disco dell'elica

$\frac{1}{2} \rho u^2$  = pressione di arresto

$\pi R^2$  = area del disco dell'elica

$$W = \left(\frac{1}{2} \rho u^2\right) (\pi R^2) \chi$$

$$\chi = \frac{2W}{\pi \rho u^3 R^2} = \frac{2}{\pi} \frac{M}{u^3}$$

$$\eta = \eta(B, z, E, b, n, \mu)$$

Porto:  $B = 2$  ;  $b = 0$

$$\eta = \eta(2, E, \mu) = \eta(2, E, \chi)$$

Fig.9: Teoria di Betz-Prandtl

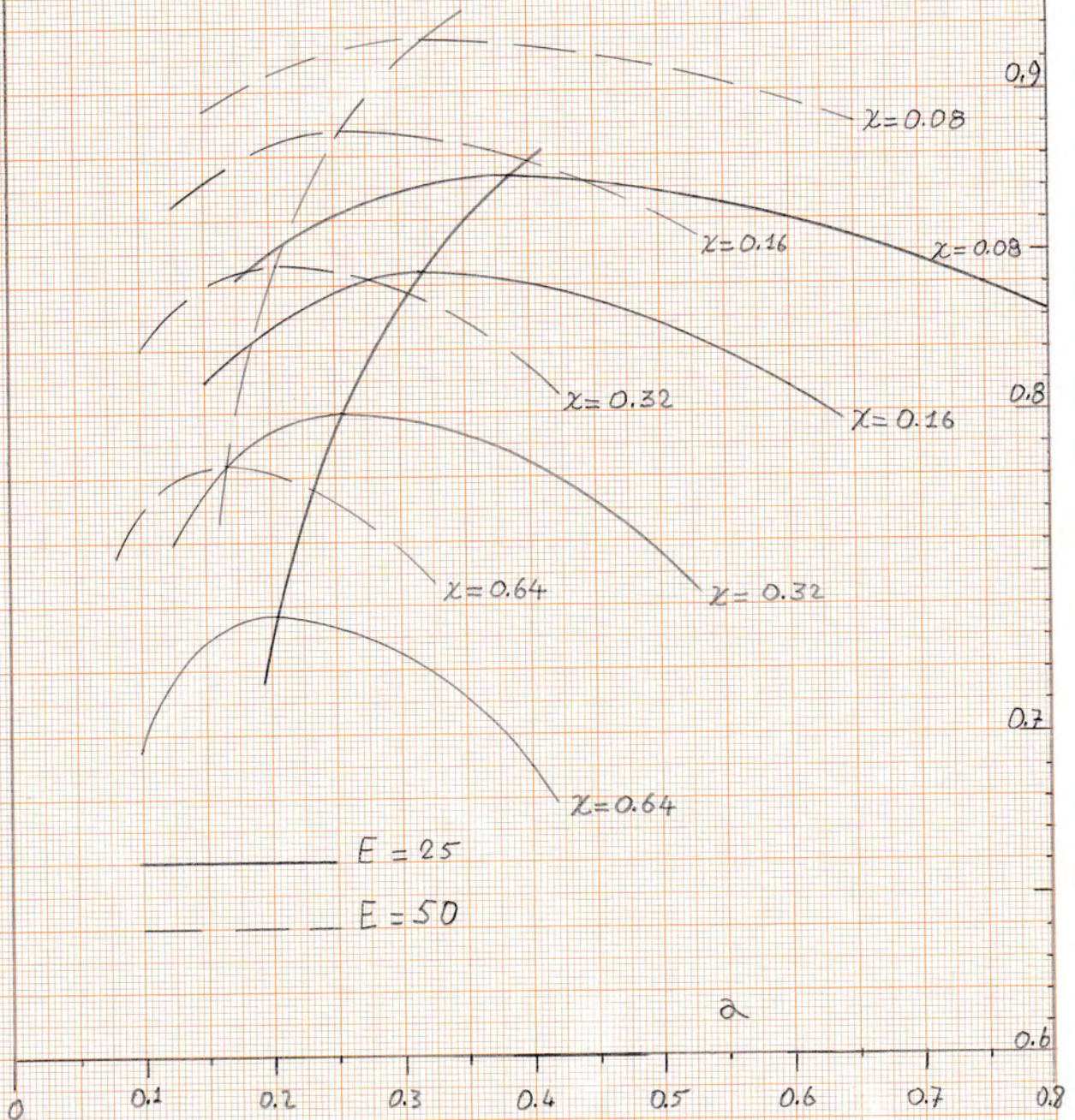
$B=2$

$b=0$

$a = \frac{u}{\omega R}$

$\chi = \frac{2W}{\pi \rho u^3 R^2}$

$\eta$





e' caratterizzata dalla funzione:

$$1 + b \xi^n$$

nella quale basta annullare uno dei due coefficienti per ritornare alla condizione di incremento di velocita' costante. Osserviamo che sebbene valgano le condizioni indicate in Fig.5, non ha senso in genere porre  $b < 0$ .

Ricordando che conviene allontanarsi il meno possibile dalla condizione ideale, indichiamo il campo piu' comune di variabilita' dei due coefficienti:

$$\begin{aligned} 0 <= b <= 3 \\ 1 <= n <= 3 \end{aligned}$$

Commento all'ELABORAZIONE:

-Calcolo di  $a_0$  : si tratta della componente assiale della velocita' alla pala, resa adimensionale dividendola per la velocita' di volo. Nel caso di velocita' variabile lungo la pala, rappresenta il valore alla radice della pala.

Questo valore viene calcolato in modo da soddisfare la condizione di momento motore imposto. Il calcolo viene eseguito applicando la correzione di Prandtl espressa dalla funzione  $\arcsin(e^{-f})$ , con  $f$  funzione del numero di pale.

-Calcolo degli integrali  $I_1 ; I_2$  : vanno eseguiti numericamente su un numero di stazioni atto a garantire una sufficiente precisione (es:  $> 10$ ). Si consiglia il metodo di Simpson.

-Calcolo della spinta adimensionale  $\sigma$ : serve al calcolo della spinta e del rendimento. L'integrale va calcolato con le modalita' gia' indicate.

-Il disegno della pala viene eseguito mediante il calcolo delle corde, delle incidenze indotte, e degli angoli di inclinazione delle pale (Fig.7). Questi dati sono disponibili per qualunque sezione della pala.

Segnaliamo che all'estremita', in conseguenza della correzione di Prandtl la corda si annulla con un raccordo arrotondato, analogamente a quanto si verifica nella ottimizzazione delle ali di allungamento finito. L'incidenza indotta non subisce brusche variazioni.

-Numero di Reynolds medio (Fig.7): a parita' di altre condizioni, all'aumentare del raggio dell'elica diminuisce il carico sul disco, e quindi l'energia cinetica ceduta alla scia. Per contro si riduce il valore di  $\alpha$ , ed aumentano quindi le perdite dovute alla resistenza di profilo. Esiste quindi un valore ottimo del raggio che rende massimo il

rendimento dell'elica. Tuttavia nella maggioranza dei casi questo valore risulta eccessivo, specie se confrontato con i guadagni marginali di rendimento che si ottengono rispetto ad un'elica di diametro ragionevole. In piu' all'aumentare del raggio (o della velocita' angolare), le corde nelle diverse sezioni diminuiscono in misura maggiore di quanto aumentino le velocita'. Segue che i numeri di Reynolds locali diminuiscono, con conseguente peggioramento delle caratteristiche aerodinamiche del profilo. E' quindi necessario tenere il fenomeno sotto controllo mediante un opportuno coefficiente di riferimento. Essendo i numeri di Reynolds locali variabili da sezione a sezione, si propone un numero di Reynolds medio  $Re$ , calcolato come media dei valori locali, ponderata con i valori locali della potenza impegnata. In un modello ad elastico, i valori di  $Re$  calcolati secondo la formula in fondo alla Fig.7 non si discostano molto dal numero di Reynolds dell'ala.

Siccome  $Re$  diminuisce all'aumentare del coefficiente di portanza, sono di massima preferibili quei profili che, a parita' di efficienza massima, presentano coefficienti di portanza minori.

Osserviamo inoltre che a parita' di altre condizioni,  $Re$  e' all'incirca inversamente proporzionale al numero di pale. Passando da un'elica bipala ad una monopala, si ha quindi un miglioramento delle caratteristiche aerodinamiche del profilo, ma un peggioramento delle condizioni alla scia. L'effetto sul rendimento puo' essere quindi valutato solo conoscendo il comportamento del profilo in funzione di  $Re$ . D'altra parte il passaggio dalla bipala alla monopala rende inevitabile nella maggior parte dei casi un aumento del raggio, allo scopo di contenere in dimensioni ragionevoli la larghezza della pala. Questo aumento, se accettabile, consente alla monopala di ottenere rendimenti confrontabili o addirittura superiori rispetto alla bipala. Restano comunque a carico della monopala i problemi di peso, bilanciatura e ripiegamento.

Infine osserviamo che i coefficienti  $b;n$  influiscono modestamente su  $Re$ .

#### -1.4-Applicazione dei risultati della teoria di Betz-Prandtl.

##### -1.4.1-Diagramma dei rendimenti di un'elica bipala con correzione di forma nulla.

Dalla Fig.6 si deduce che il rendimento dell'elica e' funzione di 6 variabili adimensionali (Fig.8):

Numero di pale  
Rapporto di avanzamento  
Efficienza di profilo  
Correzione lineare  
Correzione esponenziale  
Momento motore adimensionale

Quest'ultima grandezza, utile per i calcoli, e' solo indirettamente correlata con i parametri di progetto che piu' interessano. Difatti e' molto piu' indicativo introdurre la potenza media applicata all'elica, che si ottiene come rapporto fra l'energia disponibile ed il tempo di scarica. Questa potenza, espressa in forma adimensionale, e' a sua volta funzione del momento adimensionale e del rapporto di avanzamento.

Fissando il numero delle pale ( $B=2$ ), e azzerando la correzione di forma ( $b=0$ ), il rendimento si esprime in funzione di tre sole grandezze adimensionali (Fig.8):

Rapporto di avanzamento  
Efficienza  
Coefficiente di carico del disco dell'elica

Nella Fig.9 sono riportati i risultati dei calcoli di rendimento eseguiti per due valori di efficienza e quattro valori di coefficiente di carico, in funzione del rapporto di avanzamento. Osserviamo che per ogni coppia di valori efficienza/coefficiente di carico, esiste un ottimo di  $\alpha$ : quindi un valore ottimo della velocita' angolare: quindi un valore ottimo della sezione della matassa.

Introducendo coefficienti di correzione non nulli, i rendimenti risulteranno leggermente inferiori rispetto a quelli diagrammati.

#### -1.4.2-Calcolo di un'elica bipala per modello Wakefield.

Matassa Pirelli 76: 12 fili 1x6  
Profilo Gottinga 417a valutato a numero di Reynolds 30000, con incidenza di lavoro minore di quella di massima efficienza, allo scopo di garantire un buon funzionamento in sovraccarico.

INPUT (Fig.5):

$B=2$   
 $u=4.5$  m/s  
 $\omega=60$  rad/s  
 $R$  variabile cm  
 $E=25.6$   
 $b=0$   
 $M=1150$  gr.cm

$\rho = 0.125 \text{ kg/g/m}^3$   
 $C_l = 0.835$   
 $\vartheta_p = 3.7 \text{ gradi}$

Al variare del raggio si ottengono i seguenti risultati:

R	$\alpha$	$\mu$	$\lambda$	$\sigma$	Re	$\eta$	S
28	0.2679	0.01485	0.492	0.04224	36171	0.762	117
30	0.2500	0.01052	0.429	0.03269	31768	0.777	119
31	0.2419	0.00893	0.401	0.02890	29842	0.783	120
32	0.2344	0.00762	0.376	0.02563	28073	0.789	121
34	0.2206	0.00562	0.334	0.02033	24949	0.797	122

Considerando la limitazione relativa ad Re si sceglie il raggio di 31 cm. Dal diagramma di Fig.9 risulta che il valore di alfa (e quindi la scelta della sezione della matassa) e' abbastanza centrato.

Nella tabella che segue si riportano i risultati dei calcoli dimensionali eseguiti per R=31 cm:

$\xi$  = distanza adimensionale dall'asse  
 C = corda in mm  
 $\vartheta_e$  = angolo di inclinazione della pala in gradi  
 $\vartheta_i$  = incidenza indotta in gradi  
 p/D = rapporto fra passo e diametro

$\xi$	C	$\vartheta_e$	$\vartheta_i$	p/D
0.100	20.4	74.0	2.8	1.10
0.200	47.0	57.9	3.8	1.00
0.300	56.5	46.4	3.8	0.99
0.400	55.3	38.3	3.5	0.99
0.500	50.1	32.6	3.1	1.00
0.600	43.6	28.4	2.7	1.02
0.700	36.7	25.2	2.4	1.03
0.800	29.3	22.7	2.2	1.05
0.900	20.3	20.7	2.0	1.07
0.950	14.3	19.9	1.9	1.08
0.975	10.0	19.5	1.8	1.08
1.000	0.0	19.1	1.8	1.09

Osserviamo che le incidenze indotte sono piuttosto elevate, come conseguenza del carico elevato sul disco.

Volendo ridurre i valori massimi della corda, introduciamo a pari raggio i seguenti coefficienti di correzione:

$b=2$   
 $n=2$   
 Si hanno i seguenti risultati:  
 $\eta=0.775$  (perdita dell'1%)  
 $S=119$  gr  
 $Re=29695$  (quasi invariato)

$\xi$	C	$\vartheta_t$	$\vartheta_i$	p/D
0.100	10.6	72.2	1.4	1.01
0.200	25.8	56.2	2.1	0.94
0.300	33.8	44.9	2.3	0.94
0.400	37.0	37.2	2.3	0.95
0.500	38.1	31.8	2.3	0.98
0.600	38.1	28.0	2.4	1.00
0.700	36.9	25.2	2.4	1.03
0.800	33.9	23.0	2.5	1.07
0.900	27.0	21.3	2.6	1.10
0.950	20.3	20.6	2.7	1.12
0.975	14.8	20.3	2.7	1.13
1.000	0.0	20.0	2.7	1.14

Come si vede, a prezzo di una modesta riduzione di rendimento si ottiene una notevole riduzione della corda massima.

-1.4.3-Elica monopala: confronto con l'elica bipala nella sua ultima definizione.

Ripetiamo il calcolo nel caso di elica monopala, sempre con  $R=31$ ;  $b=2$ ;  $n=2$ . Si ottiene:

$\eta=0.754$  (perdita del 2.7% rispetto alla bipala a pari condizioni)  
 $S=116$  gr  
 $Re=57541$

$\xi$	C	$Q_t$	$Q_i$	p/D
0.100	24.2	73.0	1.8	1.03
0.200	58.0	56.7	2.6	0.96
0.300	74.6	45.4	2.8	0.96
0.400	79.7	37.7	2.9	0.97
0.500	79.8	32.4	2.9	1.00
0.600	77.3	28.6	2.9	1.03
0.700	72.5	25.8	3.0	1.06
0.800	64.2	23.6	3.1	1.10
0.900	49.4	22.0	3.2	1.14
0.950	36.4	21.3	3.3	1.16
0.975	26.3	21.0	3.3	1.17
1.000	0.0	20.7	3.4	1.19

Essendo la corda massima improponibile, forziamo la correzione ponendo  $b=n=3$  ed aumentiamo il raggio fino ad ottenere un rendimento non inferiore a quello della bipala.

Si ottiene:

$$R=37$$

$$\eta=0.777 \text{ (circa uguale a quello della bipala)}$$

$$S=119 \text{ gr}$$

$$Re=41187$$

$\xi$	C	$Q_t$	$Q_i$	p/D
0.100	19.3	68.6	1.2	0.80
0.200	38.6	50.6	1.5	0.77
0.300	43.4	39.2	1.5	0.77
0.400	43.2	32.0	1.4	0.79
0.500	42.5	27.2	1.4	0.81
0.600	42.3	23.9	1.5	0.83
0.700	42.1	21.5	1.6	0.86
0.800	40.3	19.7	1.8	0.90
0.900	33.9	18.4	2.0	0.94
0.950	26.4	17.9	2.2	0.96
0.975	19.4	17.7	2.2	0.98
1.000	0.0	17.5	2.3	0.99

La corda massima assume un valore ragionevole, ma il raggio e' molto elevato. In ogni modo, considerando che  $Re$  supera nettamente il valore per il quale sono state stimate le prestazioni aerodinamiche del profilo, concludiamo che il rendimento effettivo sara' certamente superiore rispetto a quello della bipala di riferimento.

## -2-CALCOLO DELL'ELICA FUORI DALLE CONDIZIONI DI PROGETTO.

In questo caso, assegnata la configurazione geometrica dell'elica, ci proponiamo di calcolarne le caratteristiche aerodinamiche in funzione della velocita' di volo e del momento motore, variabili con continuita' durante la salita.

La teoria esposta ci consente di risolvere agevolmente il problema, in quanto ogni sezione della pala ha un comportamento aerodinamico indipendente dalle altre sezioni.

Ragionando in termini adimensionali, il comportamento dell'elica e' completamente individuato dal rapporto di avanzamento  $\alpha$ . Difatti e' possibile in funzione di questo rapporto, costruire in maniera univoca il diagramma di velocita' adimensionale in una qualunque sezione della pala (Fig.10). Questo diagramma e' costruito per velocita' di avanzamento =1.

Ricordando che per ogni sezione sono noti l'angolo di inclinazione della pala e la corda, la soluzione del problema locale consiste nella ricerca delle componenti adimensionali  $a$ ;  $d$  della velocita' indotta.

A questo scopo e' necessario conoscere la legge sperimentale di variazione dei coefficienti di portanza e di resistenza in funzione dell'incidenza del profilo, in quanto al variare di  $\alpha$ , l'incidenza di lavoro si allontanera' da quella di progetto. La conoscenza dell'andamento dei coefficienti di portanza e di resistenza dovrebbe estendersi oltre i limiti di stallo, in quanto non si puo' escludere che in condizioni limiti di sovraccarico qualche sezione della pala superi questi limiti. Purtroppo nella maggioranza dei casi non si hanno informazioni sul comportamento dei profili oltre lo stallo. Sugeriamo in questi casi di raccordare le leggi sperimentali con i risultati della teoria di Helmholtz sulle lastre piane in condizioni di scia completamente sviluppata.

Rielaborando le formule esposte nella Fig.6, si ottiene il sistema non lineare di due equazioni in  $a$ ;  $d$  illustrato in Fig.11. Il sistema va risolto per iterazioni successive, tenendo conto della variabilita' dei coefficienti di portanza e resistenza in funzione dell'angolo di incidenza del profilo, e quindi di  $a$  e di  $d$ . Si puo' anzi introdurre un valore di tentativo per l'angolo di incidenza, e valutare la congruenza del sistema. In ogni caso si raccomanda di scegliere con cura il criterio di convergenza da seguire, per evitare problemi specie in prossimita' dello stallo ed oltre.

Risolto il sistema, si dispone nella sezione

Fig. 10: Teoria di Betz-Prandtl

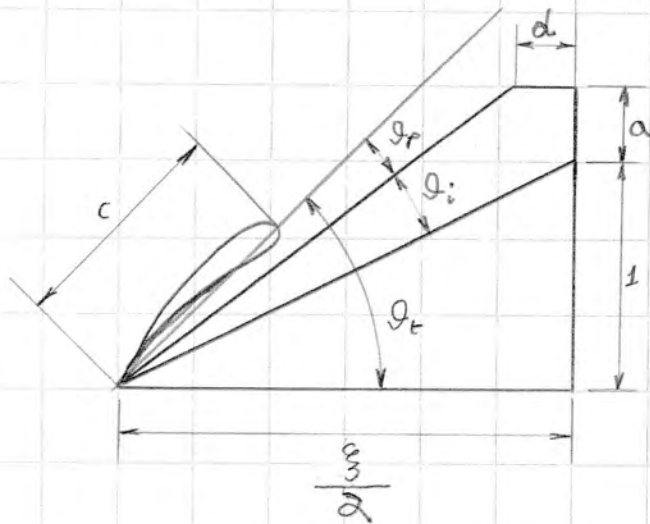


Diagramma di velocità adimensionale alla sezione  $\xi$

$1 =$  velocità di volo

$\frac{\xi}{2} =$  velocità tangenziale della pala

$\varphi_t =$  angolo di inclinazione della pala

$a =$  componente assiale della velocità indotta

$d =$  componente tangenziale della velocità indotta

$\varphi_i =$  incidenza indotta

$\varphi_p =$  incidenza aerodinamica della pala

$c =$  corda adimensionale (corda/raggio)

Posto:

$l =$  coefficiente di portanza (funzione di  $\varphi_p$ )

$C_D =$  coefficiente di resistenza ( " " " )

$B =$  numero di pale

Si ha:



Fig. 11: Teoria di Betz-Prandtl

$$f = \frac{B\sqrt{1+a^2}(1-\xi)}{2a}$$

$$F = \frac{2}{\pi} \arccos(e^{-f}) \quad (\text{Correzione di Prandtl})$$

$$\begin{cases} a = \frac{Bc}{8\pi a \xi} \sqrt{\left(\frac{1-d}{1+a}\right)^2 \xi^2 + a^2} \left[ \frac{C_l (1-d) \xi}{F} - C_D (1+a) \right] \\ d = \frac{Bc}{8\pi a \xi} \sqrt{\left(\frac{1-d}{1+a}\right)^2 \xi^2 + a^2} \left[ \frac{C_l (1+a) \frac{2}{\xi}}{F} + C_D (1-d) \right] \end{cases}$$

Imponendo  $a$ , la soluzione del sistema fornisce:

$$a(\xi)$$

$$d(\xi)$$

$$v_p(\xi) \rightarrow C_l(\xi); C_D(\xi)$$

essendo noti:

$$B$$

$$c(\xi); v_t(\xi)$$

Segue:

$$\sigma = \frac{B}{2} \int_0^1 c \left[ a^2 (1+a)^2 + (\xi - ad)^2 \right] \left[ C_l \cos(\alpha_t - \alpha_p) - C_D \sin(\alpha_t - \alpha_p) \right] d\xi$$

$$\mu = \frac{B}{2} \int_0^1 c \left[ a^2 (1+a)^2 + (\xi - ad)^2 \right] \left[ C_l \sin(\alpha_t - \alpha_p) + C_D \cos(\alpha_t - \alpha_p) \right] \xi d\xi$$

Fig. 12: Teoria di Betz-Prandtl

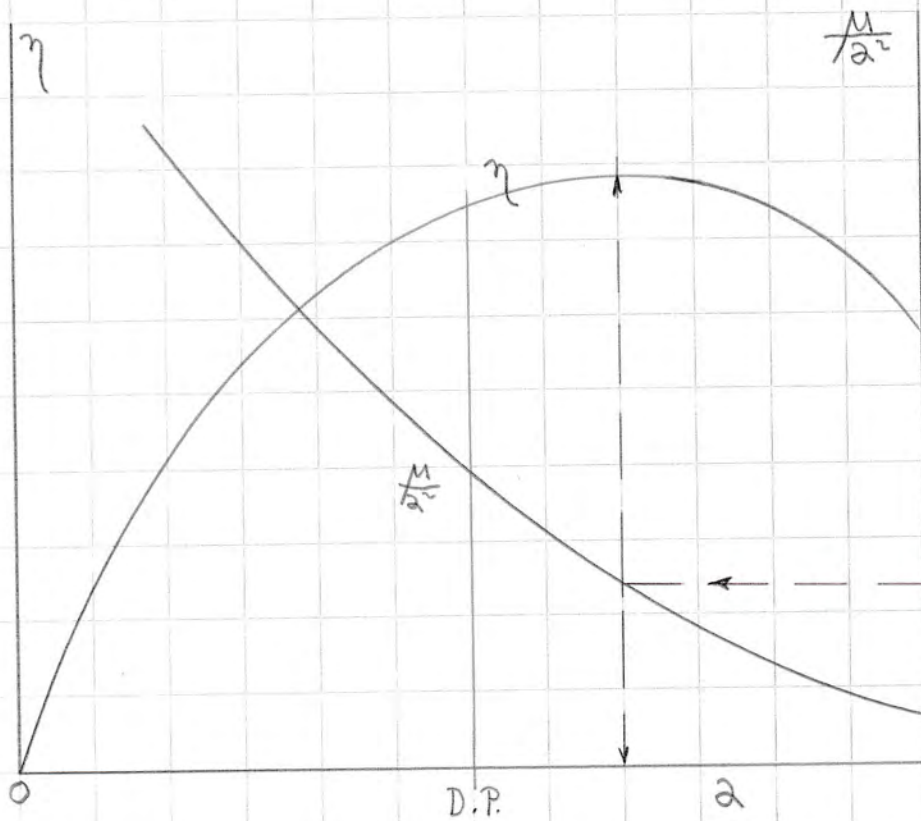
$$\left. \begin{array}{l} \alpha; \mu \\ \eta = \frac{2\sigma}{M} \\ \frac{M}{a^2} = \frac{M}{\rho u^2 R^3} \end{array} \right\} \text{funzioni di } a$$

INPUT:  $\rho, R, u, M$ . Segue:

$$\frac{M}{a^2} = \frac{M}{\rho u^2 R^3} \quad \text{segue } \alpha, \eta$$

$$\omega = \frac{u}{aR}$$

$$S = \eta \frac{M \omega}{u}$$



considerata delle velocità adimensionali  $a;d$ , dell'angolo di incidenza, e quindi dei coefficienti di portanza e resistenza.

Ripetendo il calcolo per un numero sufficiente di sezioni, si perviene a calcolare la spinta ed il momento adimensionali mediante integrazione, come indicato nella Fig.11. L'esecuzione di questi integrali non presenta alcuna difficoltà.

La spinta ed il momento adimensionali sono naturalmente funzioni di  $\alpha$ , per cui ripetendo il calcolo esposto in un intervallo di  $\alpha$  sufficientemente ampio, si ottiene la completa definizione del comportamento dell'elica. Anzi, se si potesse prescindere dall'influenza del numero di Reynolds, i risultati del calcolo potrebbero essere estesi a tutta la famiglia delle eliche simili a quella studiata.

Per l'utilizzazione nella fase di salita dei risultati trovati, conviene introdurre il coefficiente che si ottiene come rapporto fra il momento adimensionale ed il quadrato di  $\alpha$ . Questo coefficiente, che è sempre funzione di  $\alpha$ , ha il merito di essere indipendente dalla velocità angolare, a priori sconosciuta. È possibile in tal modo valutare immediatamente rendimento, velocità angolare e spinta in funzione della velocità di volo e del momento applicato all'elica, secondo quanto indicato nella Fig.12.

I tempi di elaborazione sono molto maggiori di quelli relativi al progetto dimensionale dell'elica per due ragioni: il calcolo per ogni sezione è iterativo, e in più si richiede che il calcolo completo dell'elica venga ripetuto per un numero di valori di  $\alpha$  sufficiente alla mappatura completa dell'elica nel campo di funzionamento che interessa la salita.

Per un P.C. a livello 386, il tempo di elaborazione, variabile a seconda del criterio di convergenza scelto e della frequenza del clock, può essere considerato dell'ordine di 0.3 secondi per una sezione di pala e per un valore di  $\alpha$ . Per l'esecuzione di un calcolo accurato con 20 sezioni di pala e 20 valori di  $\alpha$ , si ha quindi un tempo di elaborazione dell'ordine di 2 minuti.

### -3-CONCLUSIONI.

-La teoria di Betz-Prandtl consente il progetto accurato dell'elica di un aeromodello ad elastico, e la mappatura del comportamento dell'elica in condizioni fuori da quelle di progetto, naturalmente a patto di conoscere con sufficiente approssimazione le caratteristiche aerodinamiche del profilo della pala. La teoria è stata applicata nel

programma di valutazione delle prestazioni di volo illustrato nel convegno del 1992, con risultati che appaiono abbastanza in accordo con l'esperienza.

-L'elaborazione semplificata delle formule illustrate e' sta eseguita nel 1981, basandosi principalmente sulla trattazione del Larrabee. Riteniamo utile con i mezzi di calcolo oggi disponibili, una rielaborazione ad un livello di approssimazione migliore.

#### BIBLIOGRAFIA

-THEORY OF PROPELLERS

T. Theodorsen, Ph.D. Mc-Grow-Hill 1948

-LEZIONI di AERODINAMICA

E. Pistolesi Tipografia Accademia Navale Livorno 1950

-THE DESIGN AND SELECTION OF OPTIMUM PROPELLERS FOR GENERAL AVIATION AIRCRAFT

Henry V. Borst S.A.E. Paper 790575

-PRATICAL DESIGN OF MINIMUM INDUCED LOSS PROPELLERS

E. Larrabee M.I.T. S.A.E. Paper 790585

-PROPELLER DESIGN BY NUMERICAL OPTIMIZATION

Joel P. Mendoza NASA-Ames Research Center  
S.A.E. Paper 1980

*Felippo Lame*